

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Determinați termenul  $b_4$  al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_5 = 6$  și  $b_6 = 18$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x - 4$ . Determinați numerele reale  $m$ , știind că  $f(m) = m$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $100 \cdot 10^{2x} = 10^{3x}$ .
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-4, 0)$ ,  $B(4, 0)$  și  $C(0, 4)$ . Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sin 2x = 1$ , știind că  $\operatorname{tg} x = 1$  și  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = -1$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care matricea  $A(x)$  este inversabilă.
- 5p c) Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$ , astfel încât  $A(a) \cdot A(b) = A(c)$ . Demonstrați că  $a^2 + b^2 + 2c = 3$ .
2. Pe mulțimea  $M = [-1, 1]$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ .
- 5p a) Arătați că  $0 \circ 1 = 1$ .
- 5p b) Determinați  $x \in M$  pentru care  $x \circ x = 0$ .
- 5p c) Demonstrați că  $x \circ \sqrt{1-x^2} = 1$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + x \ln x - 1$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = e^x + \ln x + 1$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$ , pentru orice  $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{17}{6}$ .
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p c) Se consideră funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ . Determinați  $a \in (0, +\infty)$  pentru care
- $$\int_0^1 g(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_șt-nat**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$b_5^2 = b_4 b_6 \Rightarrow 36 = 18b_4$ $b_4 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$m^2 + m - 4 = m \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$ $m = -2$ sau $m = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$10^{2x+2} = 10^{3x} \Leftrightarrow 2x + 2 = 3x$ $x = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 4 = 12$ numere	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$OA = 4$ , $OB = 4$ , $OC = 4$ Centrul cercului circumscris $\Delta ABC$ are coordonatele $x = 0$ , $y = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	Cum $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $x = \frac{\pi}{4}$ $\sin 2x = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 =$ $= -4 + 3 = -1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 1$ , pentru orice număr real $x$ Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x)) \neq 0$ , deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$A(a) \cdot A(b) = A(c) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab + 2a + 2b + 1 & 3a + 3b \\ -a - b & ab - 2a - 2b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2 & 3 \\ -1 & c - 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + b = 1$ și $c = ab + 1$ $a^2 + b^2 + 2c = a^2 + b^2 + 2ab + 2 = (a + b)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$0 \circ 1 = 0 \cdot \sqrt{1-1} + 1 \cdot \sqrt{1-0} =$ $= 0 + 1 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x \circ x = 2x\sqrt{1-x^2}$ , pentru orice $x \in M$ $2x\sqrt{1-x^2} = 0$ , deci $x = -1$ , $x = 0$ sau $x = 1$ , care convin	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \circ \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-(1-x^2)} + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{x^2} + 1 - x^2 = x x  + 1 - x^2$ , pentru orice $x \in M$ Cum $ x  = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$ , obținem $x \circ \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$ , pentru orice $x \in [0, 1]$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (e^x)' + x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1' =$ $= e^x + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = e^x + \ln x + 1, \quad x \in (0, +\infty)$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>b)</b>	$f(1) = e - 1, \quad f'(1) = e + 1$ <p>Ecuția tangentei este <math>y - f(1) = f'(1)(x - 1)</math>, adică <math>y = (e + 1)x - 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	$x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right) \Rightarrow \ln x \geq \ln \frac{1}{2}, \text{ deci } f'(x) = e^x + \ln x + 1 \geq e^x + \ln \frac{e}{2} > e^x > 0, \text{ de unde obținem că}$ $f \text{ este crescătoare pe } \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right)$ <p>Pentru orice <math>x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right)</math>, <math>f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)</math>, deci <math>e^x + x \ln x - 1 \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - 1</math>, de unde obținem <math>e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}</math>, pentru orice <math>x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right)</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \int_0^1 (x^2 + 2 + x) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}, \text{ unde } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o primitivă a funcției } f$ <p><math>x^2 + x + 2 &gt; 0</math>, pentru orice număr real <math>x</math>, deci <math>F'(x) &gt; 0</math>, pentru orice număr real <math>x</math>, de unde obținem că <math>F</math> este crescătoare pe <math>\mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx = x \sqrt{x^2 + 2} \Big _0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \sqrt{3} - \int_0^1 \left( \sqrt{x^2 + 2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx,$ <p>deci <math>\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} + 2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 2} \right) \right) \Big _0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}</math></p> $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \text{ de unde obținem } a = 1, \text{ care convine}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $3(4-i) + 3i(1+i) = 9$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4$ . Calculați  $(f \circ f)(2)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x^2 - 2x + 4) = 1$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,4)$  și  $B(3,a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că punctele  $O$ ,  $A$  și  $B$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Se consideră  $E(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{pmatrix}$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1,1)) = 0$ .
- 5p** b) Demonstrați că, dacă matricea  $A(x,y)$  este inversabilă, atunci  $|x| \neq |y|$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m,n)$ , de numere întregi, pentru care  $A(m,n) \cdot A(-m,n) = I_2$ .
2. Pe mulțimea  $A = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = 4^{xy} - (1 - x - y)$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 \circ 0 = 2$ .
- 5p** b) Arătați că  $x \circ \frac{1}{x} \geq 5$ , pentru orice  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $m$  și  $n$  sunt numere naturale impare, atunci  $m \circ n$  este număr natural impar.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3 \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = 1$ , situat pe graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $x^3 \geq 3 \ln x + 1$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \frac{e^2 + 1}{e}$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{2a}{e}$ , pentru orice  $a \in (0, +\infty)$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$3(4-i) + 3i(1+i) = 12 - 3i + 3i + 3i^2 =$ $= 12 - 3 = 9$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $f(f(2)) = f(0) = -4$	2p 3p
3.	$x^2 - 2x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$m_{OA} = 2$ , $m_{OB} = \frac{a}{3}$ , unde $a$ este număr real $m_{OA} = m_{OB} \Leftrightarrow a = 6$	2p 3p
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{4} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$ $= -8 - (-8) = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(x,y)) = \begin{vmatrix} x+3y & 4y \\ -2y & x-3y \end{vmatrix} = x^2 - y^2$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $A(x,y)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x,y)) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \neq 0$ , deci $ x  \neq  y $	2p 3p
c)	$A(m,n) \cdot A(-m,n) = \begin{pmatrix} m+3n & 4n \\ -2n & m-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m+3n & 4n \\ -2n & -m-3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 - m^2 & 0 \\ 0 & n^2 - m^2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere întregi $m$ și $n$ $\begin{pmatrix} n^2 - m^2 & 0 \\ 0 & n^2 - m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 1$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, obținem perechile $(0,1)$ sau $(0,-1)$	3p 2p

<b>2.a)</b>	$2 \circ 0 = 4^{2 \cdot 0} - (1 - 2 - 0) =$ $= 1 - 1 + 2 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x \circ \frac{1}{x} = 4^{x \cdot \frac{1}{x}} - 1 + x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + 3 = x + \frac{1}{x} - 2 + 5 =$ $= \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} + 5 = \frac{(x-1)^2}{x} + 5 \geq 5$ , pentru orice $x \in A$ , $x \neq 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$m$ și $n$ sunt numere naturale impare, deci $m \geq 1$ și $n \geq 1 \Rightarrow mn \geq 1$ , de unde obținem că $4^{mn}$ este număr natural par $m$ și $n$ sunt numere naturale impare, deci $m+n-1$ este număr natural impar, de unde obținem că $m \circ n = 4^{mn} + m+n-1$ este număr natural impar	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} =$ $= \frac{3(x^3 - 1)}{x} = \frac{3(x-1)(x^2 + x + 1)}{x}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(1) = 1$ , $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ; pentru $x \in (0, 1]$ , obținem $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$ și pentru $x \in [1, +\infty)$ , obținem $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ și, cum $f(1) = 1$ , obținem că $x^3 \geq 3 \ln x + 1$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$ $= 2 - 0 = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{-1}^1 (f(x) + e^x) dx = \int_{-1}^1 (xe^x + e^x) dx = \int_{-1}^1 (xe^x)' dx = xe^x \Big _{-1}^1 =$ $= e + e^{-1} = \frac{e^2 + 1}{e}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = (x+1)e^x$ , deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ și, cum $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, -1]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [-1, +\infty)$ , obținem că $f(x) \geq f(-1)$ , pentru orice număr real $x$ $f(-1) = -\frac{1}{e}$ , deci $\int_{-1-a}^{-1+a} f(x) dx \geq -\frac{1}{e} \int_{-1-a}^{-1+a} dx = -\frac{1}{e} x \Big _{-1-a}^{-1+a} = -\frac{2a}{e}$ , pentru orice $a \in (0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat*

Testul 1

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$  este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 4x^2 + 2x$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor  $f$  și  $g$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $a$  din mulțimea  $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră paralelogramul  $MNPQ$  cu  $M(2,3)$ ,  $N(5,4)$  și  $P(4,0)$ . Determinați ecuația dreptei  $MQ$ .
- 5p 6. Triunghiul  $ABC$  este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1,0)) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că, dacă  $a \in (-\infty, 0)$  și  $b \in (0, +\infty)$ , atunci matricea  $A(a,b)$  este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Calculați  $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = 2021$  este paralelă cu asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sin x$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$ .

5p b) Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$ .



**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2 = 3 + 4\sqrt{3} - (7 + 4\sqrt{3}) =$ $= 3 + 4\sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3} = -4$ , care este număr întreg	3p 2p
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a + 3 = 4a^2 + 2a \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4}$ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p 2p
3.	$2^{x^2+4x+2} = 2^6 \cdot 2^x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 6 + x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele $a$ din mulțimea $A$ care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ sunt $-2$ și $4$ , deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$MQ \parallel NP \Rightarrow m_{MQ} = m_{NP}$ , deci $m_{MQ} = 4$ Ecuația dreptei $MQ$ este $y - 3 = 4(x - 2)$ , deci $y = 4x - 5$	3p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ și, cum $R = 5$ , obținem $\sin A = \frac{BC}{10}$ , $\sin B = \frac{AC}{10}$ și $\sin C = \frac{AB}{10}$ $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{BC}{10} \cdot \frac{AC}{10} \cdot \frac{AB}{10} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,0)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -1 - (-1) = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{vmatrix} = 2(b-a+1)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty) \Rightarrow b - a + 1 > 1 \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$ , deci $A(a,b)$ este inversabilă	2p 3p
c)	$A(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ , $\det(A(1,3)) = 6$ , deci $A(1,3)$ este inversabilă și $(A(1,3))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $X = (A(1,3))^{-1} \cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	3p 2p

<b>2.a)</b>	$1 \circ (-1) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (1 + (-1)) + \frac{2}{3} =$ $= -3 + \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$	2p 3p
<b>b)</b>	$x \circ y = 3xy - x - y + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3x \left( y - \frac{1}{3} \right) - \left( y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} =$ $= \left( y - \frac{1}{3} \right) (3x - 1) + \frac{1}{3} = 3 \left( x - \frac{1}{3} \right) \left( y - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
<b>c)</b>	$x \circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{1}{3} \circ y = \frac{1}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} = \left( \left( 1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \circ \frac{1}{3} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} =$ $= \frac{1}{3} \circ \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}} \right) = \frac{1}{3}$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 1' - \frac{1' \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= -\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ este ecuația asimptotei spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f,$ <p>deci panta asimptotei spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> este egală cu 0</p> <p>Panta dreptei de ecuație <math>y = 2021</math> este egală cu 0, deci asimptota spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> și dreapta de ecuație <math>y = 2021</math> sunt paralele, deoarece au pante egale</p>	3p 2p
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R} \text{ și } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sau } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f''(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left( -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], f''(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \text{ și}$ $f''(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right), \text{ deci } x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sunt punctele de inflexiune ale funcției } f$	2p 3p
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = \int_1^2 \frac{e^x \sin x}{\sin x} dx = \int_1^2 e^x dx =$ $= e^x \Big _1^2 = e^2 - e = e(e - 1)$	2p 3p
<b>b)</b>	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' dx = e^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^2 - e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx =$ $= e^2 + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx, \text{ deci } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{e^2 + 1}{2}$	3p 2p

e)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x - \frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \cdot \ln \sin x  \Big _{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$	3p  2p
	$= -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left( \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \left( \ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$	

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1 = -1$  și  $b_2 = 3$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 + 7x + 9$ . Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $f(x) > 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x-1) = \log_3(6-x) - 2$ .
- 5p** 4. Determinați numărul natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , pentru care  $C_n^{n-2} - A_n^1 = 5$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(3, -1)$ , numărul real  $m$  și dreapta  $d$  de ecuație  $y = (m-1)x - 2m$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$  este egală cu 0.
- 5p** 6. Determinați  $\cos(\pi - 2x)$ , știind că  $x$  este număr real și  $\cos x = \frac{2}{3}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = 2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(2)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $a$  pentru care matricea  $B(a) = A(a) \cdot A(a)$  are două elemente egale cu 0.
- 5p** c) Pentru  $a = 1$ , arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy$ .
- 5p** a) Arătați că  $(-3) * 3 = 9$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * y = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $2^x * 4^{x-1} = \frac{1}{4}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{x^3}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4}$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2xe^x - 2x + 1}{x}$ .

**5p** a) Arătați că funcția  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \ln x + 2e^x - 2x + 2021$  este o primitivă a funcției  $f$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_1^e f(x) dx = 2e^e - 4e + 3$ .

**5p** c) Calculați  $\int_1^2 x f(x) dx$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 2

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = -3$ $b_5 = b_1 q^4 = (-1)(-3)^4 = -81$ , deci $ b_5  = 81$	2p 3p
2.	$-2x^2 + 7x + 9 > 0 \Leftrightarrow (2x - 9)(x + 1) < 0$ $x \in \left(-1, \frac{9}{2}\right)$	2p 3p
3.	$\log_3 \frac{x-1}{6-x} = -2 \Rightarrow \frac{x-1}{6-x} = \frac{1}{9}$ $x = \frac{3}{2}$ , care convine	3p 2p
4.	$\frac{n(n-1)}{2} - n = 5 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0$ Cum $n$ este număr natural, $n \geq 2$ , obținem $n = 5$	3p 2p
5.	Distanța de la punctul $A$ la dreapta $d$ este egală cu $0 \Rightarrow A \in d$ $-1 = (m-1) \cdot 3 - 2m \Leftrightarrow m = 2$	2p 3p
6.	$\cos(\pi - 2x) = -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ $= 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$ $= 6 - 2 + 2 - 4 + 1 - 6 = -3$	2p 3p
b)	$B(a) = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 8 & 3-2a & -1 \\ 5-a & a^2+a+1 & -2-a \\ 4+a & -a^2-a+2 & -1+a \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ Matricea $B(a)$ are două elemente egale cu 0 dacă $a = -2$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	Pentru $a = 1$ , sistemul devine $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ și adunând primele două ecuații ale sistemului obținem $3x + y - z + x - y + z = 4$ , deci $x = 1$ Adunând a doua și a treia ecuație din sistem, obținem $x - y + z + 2x + y - z = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ , deci sistemul nu are soluții	3p 2p

<b>2.a)</b>	$(-3)*3 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 3 - (-3) \cdot 3 =$ $= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 9 = 9$	3p 2p
<b>b)</b>	$x * y = \frac{1}{4} - xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} =$ $= \frac{1}{4} - x\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
<b>c)</b>	$\frac{1}{4} - \left(2^x - \frac{1}{2}\right)\left(4^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \text{ sau } 4^{x-1} = \frac{1}{2}$ $x = -1 \text{ sau } x = \frac{1}{2}$	3p 2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \left(-1 + 3x^{-1} - 4x^{-\frac{3}{2}}\right)' = 3 \cdot (-1)x^{-2} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} =$ $= -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-3x + 6\sqrt{x}}{x^3} = \frac{3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right) = -1$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = -1</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	3p 2p
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot 3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot 3\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x^3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-4^x \cdot 3\sqrt{x}}{x^3(\sqrt{x}+2)} = -6$	3p 2p
<b>2.a)</b>	$F'(x) = (\ln x + 2e^x - 2x + 2021)' = \frac{1}{x} + 2e^x - 2 =$ $= \frac{1 + 2xe^x - 2x}{x} = f(x), \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este o primitivă a funcției } f$	3p 2p
<b>b)</b>	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = F(e) - F(1) =$ $= 2e^e - 4e + 3$	3p 2p
<b>c)</b>	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 (2xe^x - 2x + 1) dx = \left((2x-2)e^x - x^2 + x\right) \Big _1^2 =$ $= 2e^2 - 4 + 2 = 2e^2 - 2$	3p 2p

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ , 2 și  $\sqrt{10} + \sqrt{6}$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^{2021}}{x^2 + 1}$ . Arătați că funcția  $f$  este impară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = 16$ .
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -2)$ ,  $B(0, 3)$  și  $C(-2, 2)$ . Determinați ecuația dreptei  $d$  care trece prin punctul  $C$  și este paralelă cu dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Triunghiul  $ABC$  are măsura unghiului  $A$  de  $30^\circ$  și măsura unghiului  $B$  de  $45^\circ$ . Arătați că  $AC = BC\sqrt{2}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 4x + y + mz = 9 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - 3y = -7 \end{cases}$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(m)) = m - 10$ , pentru orice număr real  $m$ .
- 5p** b) Determinați inversa matricei  $A(9)$ .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $m$ ,  $m \neq 10$ , dacă  $(a, b, c)$  este soluția sistemului de ecuații, atunci  $\log_2 a = b + c$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = 7(x - 3)(y - 3) + 3$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * 3 = 3$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$ , astfel încât  $x * x * x = -46$ .
- 5p** c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{5^x}{7} + 3$ . Demonstrați că  $f(x) * f(y) = f(x + y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x + 2)}$ .
- 5p** a) Arătați că funcția  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = 2x + \frac{1}{x} - 4 \ln(x + 2)$  este o primitivă a funcției  $f$ .



**5p** | **b)** Calculați  $\int_1^2 (x+2)f(x) dx$ .

**5p** | **c)** Determinați numărul real  $m$ ,  $m > 2$ , astfel încât  $\int_2^m f(x) dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{10} + \sqrt{6}) = \sqrt{10}^2 - \sqrt{6}^2 =$ $= 10 - 6 = 4 = 2^2$ , deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \frac{(-x)^{2021}}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^{2021}}{x^2 + 1} =$ $= -\frac{x^{2021}}{x^2 + 1} = -f(x)$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $f$ este impară	3p 2p
3.	$2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x + 2) = 0$ Cum $2^x > 0$ , pentru orice număr real, obținem $2^x = 8$ , deci $x = 3$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ este $C_5^2 =$ $= \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 5$ și, cum $d \parallel AB$ , obținem $m_d = 5$ Ecuația dreptei $d$ este $y - 2 = 5(x + 2)$ , deci $y = 5x + 12$	3p 2p
6.	$\sin A = \frac{1}{2}$ , $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{2AC}{\sqrt{2}} = 2BC$ , deci $AC = BC\sqrt{2}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3m + 2 - (-4m) - 12 - 0 =$ $= -3m + 4m - 10 = m - 10$ , pentru orice număr real $m$	3p 2p
b)	$A(9) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ , $\det(A(9)) = -1$ $A^{-1}(9) = \begin{pmatrix} 3 & 27 & 19 \\ -2 & -18 & -13 \\ -1 & -10 & -7 \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	$m \neq 10 \Rightarrow \det(A(m)) \neq 0$ , deci sistemul este compatibil determinat și $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ Cum $\log_2 a = \log_2 2 = 1$ și $b + c = 1 + 0 = 1$ , obținem $\log_2 a = b + c$	3p 2p

<b>2.a)</b>	$x * 3 = 7(x-3)(3-3) + 3 =$ $= 0 + 3 = 3$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * x = 7(x-3)^2 + 3$ , $x * x * x = 49(x-3)^3 + 3$ , pentru orice număr real $x$ $49(x-3)^3 + 3 = -46 \Leftrightarrow (x-3)^3 = -1$ , deci $x = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f(x) * f(y) = 7(f(x)-3)(f(y)-3) + 3 = 7\left(\frac{5^x}{7} + 3 - 3\right)\left(\frac{5^y}{7} + 3 - 3\right) + 3 =$ $= 7 \cdot \frac{5^x}{7} \cdot \frac{5^y}{7} + 3 = \frac{5^{x+y}}{7} + 3 = f(x+y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}}{x^2 + 2x + 2} =$ $= \frac{x^2 + 2x + 2 - x(x+1)}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{x + 2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = 1$ Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ , $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-2, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , $f(-2) = -\sqrt{2}$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ și, cum $f$ este continuă, obținem $\text{Im } f = [-\sqrt{2}, 1)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$F'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x+2} = \frac{2x^2(x+2) - (x+2) - 4x^2}{x^2(x+2)} =$ $= \frac{2x^3 - x - 2}{x^2(x+2)} = f(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^2 (x+2)f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x^3 - x - 2}{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \left(x^2 - \ln x + \frac{2}{x}\right) \Big _1^2 =$ $= 4 - \ln 2 + \frac{2}{2} - 1 + \ln 1 - 2 = 2 - \ln 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_2^m f(x) dx = F(x) \Big _2^m = F(m) - F(2) = 2m + \frac{1}{m} - \frac{9}{2} + 4 \ln \frac{4}{m+2}$ $2m + \frac{1}{m} - \frac{9}{2} + 4 \ln \frac{4}{m+2} = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$ , deci $\ln \frac{4}{m+2} = -1 \Rightarrow m = 4e - 2$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = -5$  și rația  $r = 8$ .
- 5p** 2. Determinați valorile reale nenule ale lui  $a$  pentru care ecuația  $ax^2 - x - a - 1 = 0$  are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = 2x$ .
- 5p** 4. Calculați  $5A_3^2 - 3C_5^3$ .
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$  și  $\vec{b} = 5\vec{i} - (m^2 + 1)\vec{j}$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numerele reale  $m$  pentru care vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB > BC$ ,  $AC = 6$ ,  $BC = 10$  și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului  $C$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(a, b) = aI_2 + bA$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $M(a, b) \cdot M(x, y) = M(ax, ay + bx)$ , pentru orice numere reale  $a, b, x$  și  $y$ .
- 5p** c) Arătați că, dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale pentru care matricele  $B = M(x, 2y) + M(y, 2x)$  și  $C = M(x\sqrt{2}, 1) \cdot M(y\sqrt{2}, 1)$  sunt egale, atunci  $x^2 + y^2 = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = xy + 2x + 2y + 2$  și  $x \circ y = x + y + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * e = e$ , pentru orice număr real  $x$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $n * (-n) \geq n \circ (-n)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x \ln(x + 1) & , \quad x \in [0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p** a) Arătați că funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real  $a$ ,  $a < 0$ , tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(a, f(a))$  nu este paralelă cu axa  $Ox$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$  și  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1 + x\sqrt{x}}{x^2}$ .
- 5p** a) Demonstrați că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .

**5p** b) Calculați  $\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx$ .

**5p** c) Determinați numărul real  $m$ ,  $m \in (0,1)$ , pentru care  $\int_m^1 f^2(x) g(x) dx = \frac{1}{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \frac{(2a_1 + 6r) \cdot 7}{2} = \frac{(2 \cdot (-5) + 6 \cdot 8) \cdot 7}{2} =$ $= 133$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$\Delta = 1 - 4a(-a - 1) = (2a + 1)^2$ $\Delta > 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \text{ și, cum } a \text{ este număr real nenul, obținem } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = x \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ $x = -3 \text{ sau } x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	$5A_3^2 - 3C_5^3 = 5 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} - 3 \cdot \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} =$ $= 5 \cdot 6 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 30 - 30 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$\frac{2}{5} = \frac{m}{-m^2 - 1} \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0$ $m = -2 \text{ sau } m = -\frac{1}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} \Rightarrow 15 = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin C}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2}$ Cum $AB > BC > AC$ , unghiul $C$ are măsura cea mai mare dintre unghiurile $\Delta ABC$ , deci unghiul $C$ are măsura de $150^\circ$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 =$ $= -1 + 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ $M(a, b) \cdot M(x, y) = (aI_2 + bA)(xI_2 + yA) = axI_2 + ayA + bxA + ybA \cdot A = axI_2 + (ay + bx)A =$ $= M(ax, ay + bx)$ , pentru orice numere reale $a, b, x$ și $y$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$B = xI_2 + 2yA + yI_2 + 2xA = M(x + y, 2(x + y))$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ Cum $C = M(2xy, \sqrt{2}(x + y))$ , obținem că $x + y = 2xy = 0$ , deci $x = y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$(1 * 2) \circ (1 * 3) = (2 + 2 + 4 + 2) \circ (3 + 2 + 6 + 2) = 10 \circ 13 = 10 + 13 + 2 = 25$ $1 * (2 \circ 3) = 1 * (2 + 3 + 2) = 1 * 7 = 7 + 2 + 14 + 2 = 25$ , deci $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \circ (-2) = (-2) \circ x = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = -2$	<b>2p</b>
	$x * e = x * (-2) = -2x + 2x + (-4) + 2 = -2 = e$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$n * (-n) = 2 - n^2$ , $n \circ (-n) = 2$ , pentru orice număr natural $n$	<b>2p</b>
	$2 - n^2 \geq 2 \Leftrightarrow n^2 \leq 0$ , deci $n = 0$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 0$ , $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x+1)) = 0$ și $f(0) = 0$ , deci	<b>3p</b>
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , de unde obținem că $f$ este continuă în $x = 0$	
	Cum $f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ , obținem că $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ și $f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$	<b>3p</b>
	$f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este convexă pe $(0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	Dacă $a \in (-\infty, 0)$ , atunci panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(a, f(a))$ este	<b>2p</b>
	$f'(a) = 1 + \frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$	
	Cum $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1} = 1-2a \Leftrightarrow 4a^2-4a+4 = 4a^2-4a+1$ , ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real $a$ , $a < 0$ , tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A$ nu este paralelă cu axa $Ox$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2} = g(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este o primitivă a funcției $g$	
<b>b)</b>	$\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx = f(x) \Big _{\frac{1}{4}}^4 = f(4) - f\left(\frac{1}{4}\right) =$	<b>3p</b>
	$= \frac{15}{4} + 3 = \frac{27}{4}$	
<b>c)</b>	$\int_m^1 f^2(x) \cdot g(x) dx = \int_m^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3} f^3(x) \Big _m^1 = \frac{1}{3} (f^3(1) - f^3(m))$	<b>3p</b>
	Cum $f(1) = 1$ , obținem $f(m) = 0$ , deci $m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ , care convine	

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**Testul 5**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $(2 - \lg 40) \cdot \frac{1}{\lg^2 5 - \lg^2 2} = 1$ .
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care soluția ecuației  $2x - m^2 + 1 = 0$  este număr real strict mai mic decât 0.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2+x} = 4^{2x}$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea  $(n+1)! - n! \leq n+2$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-6,6)$  și  $B(0,2)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$ , știind că  $\overline{AO} = 2\overline{BC}$ .
- 5p** 6. Determinați numerele reale  $a$ ,  $a > -2$ , știind că  $a^2 + 1$  și  $a + 2$  sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a \in (0, +\infty)$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(4)) = 1$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) > 0$ , pentru orice  $a \in (0, +\infty)$ .
- 5p** c) Arătați că matricea  $B(n) = A(1^2) + A(2^2) + A(3^2) + \dots + A(n^2)$  este inversabilă, pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = \sqrt{3}(xy + 4) - 3(x + y)$ .
- 5p** a) Arătați că  $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x \circ y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Calculați  $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x - \operatorname{arctg} x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{5x}{x^2 + x + 4}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p** a) Arătați că funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este crescătoare pe  $(-\infty, 0)$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f(x) \leq 1$ , pentru orice număr real  $x$ .



2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx = 16$ .

5p b) Calculați  $\int_1^3 f(x)dx$ .

5p c) Demonstrați că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă.

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 5

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$(\lg 100 - \lg 40) \cdot \frac{1}{(\lg 5 - \lg 2)(\lg 5 + \lg 2)} =$ $= \lg \frac{100}{40} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2} \cdot \lg 10} = \lg \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\lg \frac{5}{2}} = 1$	2p 3p
2.	$2x = m^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{m^2 - 1}{2}$ <p>Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât <math>0 \Leftrightarrow m^2 - 1 &lt; 0</math>, deci <math>m \in (-1, 1)</math></p>	2p 3p
3.	$2^{x^2+x} = 2^{4x} \Leftrightarrow x^2 + x = 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ <p><math>x = 0</math> sau <math>x = 3</math></p>	3p 2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile</p> <p>Numerele <math>n</math> din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea <math>(n+1)! - n! \leq n+2</math> sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AO} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = x_C \vec{i} + (y_C - 2)\vec{j}$ , deci $6\vec{i} - 6\vec{j} = 2x_C \vec{i} + 2(y_C - 2)\vec{j}$ <p>Coordonatele punctului <math>C</math> sunt <math>x_C = 3</math>, <math>y_C = -1</math></p>	3p 2p
6.	<p>Triunghiul este dreptunghic, deci <math>a^2 + 1 = 2(a+2)</math>, de unde obținem <math>a^2 - 2a - 3 = 0</math></p> <p><math>a = -1</math> sau <math>a = 3</math>, care convin</p>	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(1) - A(a+1) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a} \\ 2 & 1 & 2 \\ a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a+1} \\ 1 & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$ <p>pentru orice <math>a \in (0, +\infty)</math></p> $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = \sqrt{a+1} - 1 > 0, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	3p 2p

<b>c)</b>	$B(n) = \begin{pmatrix} 1+1+\dots+1 & 0 & 1+2+\dots+n \\ 1+1+\dots+1 & 0 & 1+1+\dots+1 \\ 1^2+2^2+\dots+n^2 & 1+1+\dots+1 & 1+1+\dots+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}, \text{ pentru}$ <p>orice număr natural <math>n</math></p> <p>Pentru orice număr natural <math>n, n \geq 2</math>, <math>\det(B(n)) = \frac{n^3(n-1)}{2} \neq 0</math>, deci matricea <math>B(n)</math> este inversabilă, pentru orice număr natural <math>n, n \geq 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}(\sqrt{3} \cdot 2 + 4) - 3(\sqrt{3} + 2) =$ $= 6 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>b)</b>	$x \circ y = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}xy - 3x - 3y + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ $= \sqrt{3}x(y - \sqrt{3}) - 3(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	$x \circ \sqrt{3} = \sqrt{3}, \sqrt{3} \circ y = \sqrt{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$ $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = (3^1 \circ \sqrt{3}) \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} = \sqrt{3} \circ \left( 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}} \right) = \sqrt{3}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	<p>Cum <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &lt; 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \arctg x) = 0</math>, <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x^2 + x + 4} = 0</math> și <math>f(0) = 0</math>, obținem <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)</math>, deci <math>f</math> este continuă în <math>x = 0</math></p> <p>Cum <math>f</math> este continuă pe <math>(-\infty, 0)</math> și pe <math>(0, +\infty)</math>, obținem că <math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$f(x) = x - \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty, 0)$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	<p><math>f</math> este crescătoare pe <math>(-\infty, 0)</math> și continuă în <math>x = 0</math>, deci <math>f(x) \leq f(0)</math> și, cum <math>f(0) = 0</math>, obținem <math>f(x) \leq 0</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0)</math></p> <p>Pentru orice <math>x \in [0, +\infty)</math>, <math>f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{x^2 + x + 4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0</math>, deci <math>f(x) \leq 1</math>, pentru orice număr real <math>x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq 1</math>, pentru orice număr real <math>x</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\int_1^5 x(x+2)f(x) dx = \int_1^5 (x+1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^5 =$ $= \frac{25}{2} + 5 - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = 16$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x) \Big _1^3 =$ $= \frac{1}{2} (\ln 15 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

<b>e)</b>	$F'(x) = f(x), x \in (0, +\infty) \Rightarrow F''(x) = \frac{x^2 + 2x - (x+1)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}, x \in (0, +\infty)$ $F''(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci } F \text{ este concavă}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
-----------	---	------------------------

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Calculați media geometrică a numerelor  $x = \log_6 8 + \log_6 27$  și  $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$ .
- 5p** 4. Arătați că produsul numerelor  $A_5^2$ ,  $C_6^2$  și  $A_4^2$  este pătratul unui număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, a+1)$ ,  $B(2, -3)$  și  $C(3, 1-a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul  $MNP$ , dreptunghic în  $N$ , știind că  $MN = 12$  și  $NP = 16$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  astfel încât  $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2021 * (-2021) = -3$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$ . Demonstrați că  $f(x) * f(y) = f(x+y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați asimptotele graficului funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$ .

5p b) Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 6

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$x = \log_6(8 \cdot 27) = 3$ , $y = \sqrt{144} = 12$ Media geometrică a numerelor $x$ și $y$ este $\sqrt{xy} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$	2p 3p
2.	Graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$ , deci $4 - 4a > 0$ $a \in (-\infty, 1)$	3p 2p
3.	$2 - x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = -3$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	$A_5^2 = 4 \cdot 5$ , $C_6^2 = 3 \cdot 5$ și $A_4^2 = 3 \cdot 4$ $A_5^2 \cdot C_6^2 \cdot A_4^2 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 60^2$	3p 2p
5.	$m_{AB} = -\frac{a+4}{3}$ , $m_{BC} = 4 - a$ , unde $a$ este număr real $A$ , $B$ și $C$ sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{BC} \Leftrightarrow a + 4 = 3a - 12$ , deci $a = 8$	2p 3p
6.	$MP = 20$ , deci semiperimetrul $\triangle MNP$ este $p = 24$ $\mathcal{A}_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot NP}{2} = 96 \Rightarrow r = \frac{\mathcal{A}_{\triangle MNP}}{p} = \frac{96}{24} = 4$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 2 + (-2) - 4 - (-1) - (-4) = -3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = a^3 - 4a$ , pentru orice număr real $a$ $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a+2) \neq 0$ , deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$	2p 3p
c)	Dacă $(x_0, y_0, z_0)$ este soluție a sistemului cu $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$ , atunci $\begin{cases} ax_0 + 4x_0 + 3x_0 = 1 \\ 2x_0 + 8x_0 - 3ax_0 = 1, \\ x_0 + 2ax_0 - 3x_0 = 0 \end{cases}$ unde $a$ este număr real, deci $\begin{cases} x_0(a+7) = 1 \\ x_0(10-3a) = 1 \\ 2x_0(a-1) = 0 \end{cases}$ $x_0(a+7) = 1$ , deci $x_0 \neq 0$ și, cum $2x_0(a-1) = 0$ , obținem că $a = 1$ ; $x_0(a+7) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{8}$ și $x_0(10-3a) = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{7}$ , ceea ce este imposibil	2p 3p

<b>2.a)</b>	$2021 * (-2021) = \sqrt[3]{2021^3 + (-2021)^3 - 27} = \sqrt[3]{2021^3 - 2021^3 - 27} = \sqrt[3]{-27} = -3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3 - 27} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 - 27 = x^3$ , pentru orice număr real $x \Leftrightarrow e = 3$ Cum $3 * x = \sqrt[3]{3^3 + x^3 - 27} = \sqrt[3]{x^3} = x$ , pentru orice număr real $x$ , obținem că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(x) * f(y) = \sqrt[3]{f^3(x) + f^3(y) - 27} = \sqrt[3]{(x+27) + (y+27) - 27} = \sqrt[3]{x+y+27} = f(x+y)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{3x^2(x^6+7) - 6x^5(x^3+3)}{(x^6+7)^2} = \frac{-3x^2(x^6+6x^3-7)}{(x^6+7)^2} = \frac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3}{x^6+7} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ , iar graficul funcției $f$ nu admite asimptote verticale	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{7}$ , $x = 0$ sau $x = 1$ ; $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{7}] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -\sqrt[3]{7}]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [-\sqrt[3]{7}, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-\sqrt[3]{7}, 1]$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(-\sqrt[3]{7}) = -\frac{1}{14}$ , $f(1) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , deci $-\frac{1}{14} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ , pentru orice număr real $x$ , de unde obținem $-\frac{4}{7} \leq f(x) - f(y) \leq \frac{4}{7}$ , deci $ f(x) - f(y)  \leq \frac{4}{7}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big _0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx = \int_0^1 (2x+1)(-e^{-x})' dx = -(2x+1)e^{-x} \Big _0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx = -\frac{3}{e} + 1 - 2e^{-x} \Big _0^1 = -\frac{3}{e} + 1 - \frac{2}{e} + 2 = \frac{3e-5}{e}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-\frac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{x}} \Big _1^2 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e-1}{2e^2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>



**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_șt-nat**

**Testul 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $a_{2021}$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 2$  și  $a_3 = 8$ .
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  cu dreapta  $d$  de ecuație  $y = -x + 3$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3^{x+2}} = 27$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să fie divizor al numărului 48.
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + m\vec{j}$  și  $\vec{v} = (m-4)\vec{i} + 2\vec{j}$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 6$ ,  $AC = 3$  și unghiul  $A$  de  $120^\circ$ . Calculați perimetrul triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + 2ay + z = 1 \\ x + ay - z = -1 \end{cases}$ , unde  $a$  este

număr real.

- 5p** a) Arătați că  $\det(A(-1)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p** c) Determinați numărul întreg  $a$ , știind că există numerele reale  $y_0$  și  $z_0$  astfel încât  $(1, y_0, z_0)$  este soluție a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = x + 5xy + y$ .
- 5p** a) Verificați dacă  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** b) Demonstrați că  $x \circ y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Calculați partea întregă a numărului  $q = \left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)\ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1, 0)$ .
- 5p** c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $[1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 + 1}$ , unde  $n$  este număr natural nenul.
- 5p** a) Pentru  $n = 3$ , se consideră funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ . Determinați primitiva  $G$  a funcției  $g$  pentru care  $G(0) = 2021$ .

**5p** b) Pentru  $n=1$ , calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Demonstrați că  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$ , pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 2$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$ $a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	2p 3p
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	3p 2p
3.	$\frac{x+2}{3^2} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$ $x = 4$	3p 2p
4.	Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele din mulțimea $A$ care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$ , unde $m$ este număr real $4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	3p 2p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$ , deci $BC = 3\sqrt{7}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3(\sqrt{7} + 3)$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$ , pentru orice număr real $a$ Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right\}$	2p 3p
c)	Cum $a$ este număr întreg, obținem că $\det(A(a)) \neq 0$ , deci $(1, y_0, z_0)$ este unica soluție a sistemului de ecuații $1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum $a$ este număr întreg, obținem $a = -1$	2p 3p
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$ , pentru orice număr real $x$ $0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	2p 3p

<b>b)</b>	$x \circ y = 5xy + x + y + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 5x\left(y + \frac{1}{5}\right) + \left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} =$	<b>3p</b>
	$= \left(y + \frac{1}{5}\right)(5x + 1) - \frac{1}{5} = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \circ \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right) \circ y = -\frac{1}{5}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b>
	$q = \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \circ \left(-\frac{1}{3}\right) \circ \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \circ \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \circ \left(\left(-\frac{1}{6}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{2021}\right)\right) = -\frac{1}{5}$ , deci $[q] = -1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln x + (x+1) \cdot (\ln x)' =$	<b>2p</b>
	$= 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$f'(1) = 2$ , $f(1) = 0$	<b>2p</b>
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = 2x - 2$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
	$f''(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe $[1, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$g(x) = x^3 + 1$ , $x \in \mathbb{R}$ , deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$ , unde $c \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>
	Cum $G(0) = 2021$ , obținem $c = 2021$ , deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $G(x) = \frac{x^4}{4} + x + 2021$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x \right) \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{x^n+1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$ , pentru orice $x \in [0, 1]$ și pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$ , deci	<b>3p</b>
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$ , pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$	
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1 dx = x \Big _0^1 = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$ , pentru orice număr natural $n$ , $n \geq 2$	<b>2p</b>

**Examenul de bacalaureat național 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 8**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_2 = 2$  și  $b_3 = 4$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 3$ . Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{x+2} = 1 - x$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(-1,0)$  și  $C(a, a+2)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\overline{OC}$  și  $\overline{AB}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = -2$ .
- 5p** b) Arătați că matricea  $A(a)$  este inversabilă, pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere întregi și  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $A(a) \cdot X = A(b)$ , atunci elementele matricei  $X$  sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea  $A = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că numărul  $a = 2 \circ 4$  este întreg.
- 5p** b) Arătați că  $x \circ y \geq 4$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” **nu** admite element neutru.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ ,  $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul în care graficul intersectează axa  $Oy$ .
- 5p** c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_0^n f(x)e^{-x} dx < 1$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Examenul de bacalaureat național 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 8

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$q = 2$ , unde $q$ este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ $b_1 = 1$ , deci $b_1 + b_2 + b_3 = 7$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$ Cum $\Delta > 0$ , graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1 x_2 = \frac{3}{1} = 3$	2p 3p
3.	$4(x+2) = (1-x)^2 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$ $x = -1$ , care convine; $x = 7$ , care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor și unităților se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{OC} = a\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ , $\vec{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ $\frac{a}{-2} = \frac{a+2}{-3} \Leftrightarrow a = 4$	2p 3p
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} + \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} =$ $= 2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin x \cdot \frac{1}{2} = \sin x$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2$	2p 3p
b)	$\det A(a) = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - a^2 - 3a - 2 = -2$ , pentru orice număr real $a$ $\det A(a) \neq 0 \Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$	3p 2p
c)	$(A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a+3}{2} & \frac{a+1}{2} \\ \frac{a+2}{2} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ , pentru orice număr întreg $a$ $X = (A(a))^{-1} A(b) = \begin{pmatrix} a-b+1 & a-b \\ b-a & b-a+1 \end{pmatrix}$ și, cum $a$ și $b$ sunt numere întregi, obținem că $X$ are toate elementele numere întregi	2p 3p

<b>2.a)</b>	$a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$ $= 1 + 4 = 5$ , care este număr întreg	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$ , pentru orice $x, y \in A$ $x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$ , deci $x \circ y \geq 4$ , pentru orice $x, y \in A$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Dacă legea de compoziție „ $\circ$ ” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$ , pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$ , de unde obținem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$ , deci $e = 4$ Cum $2 \circ 4 \neq 2$ , obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziție „ $\circ$ ” nu admite element neutru	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$ $= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ , $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	Graficul funcției $f$ intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, f(0))$ , $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = -2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$ , $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 (x+4)f(x) dx = \int_0^2 (x+2) dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 + 2x \Big _0^2 =$ $= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = (x - 2 \ln(x+4)) \Big _0^1 =$ $= 1 - 2 \ln 5 + 2 \ln 4 = 1 - 2 \ln \frac{5}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ și $e^{-x} > 0$ , deci $f(x)e^{-x} \leq e^{-x}$ , pentru orice $x \in [0, n]$ , pentru orice număr natural nenul $n$ $\int_0^n f(x)e^{-x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx = -e^{-x} \Big _0^n = 1 - e^{-n} < 1$ , pentru orice număr natural nenul $n$	<b>2p</b> <b>3p</b>



**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**Testul 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 5$  și  $a_5 = 11$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ . Determinați numărul real  $a$  știind că  $f(a) = f(a+1)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - x + 13} = x + 1$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,4)$ ,  $B(-1,1)$  și  $C(3,a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care dreptele  $OC$  și  $AB$  sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Arătați că, pentru orice număr real  $x$ ,  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 2$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + xy)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Determinați perechile de numere întregi  $(m, n)$  pentru care matricea  $A(m)$  este inversa matricei  $A(n)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + 2ay$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $1 \circ 0 = 1$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$ , știind că  $x \circ 1 > 4$  dacă și numai dacă  $x \in (3, +\infty)$ .
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă  $a = \frac{1}{2}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $e^x (f(x) + f'(x)) = 1$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = x$  este tangentă la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^{\pi} xf(x) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 9

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$	3p 2p
2.	$a^2 + 1 = (a+1)^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 + 1 = a^2 + 2a + 2 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$ $a = -\frac{1}{2}$	3p 2p
3.	$x^2 - x + 13 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 12$ $x = 4$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $2 \cdot 3 = 6$ cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	2p 2p 1p
5.	$m_{AB} = 1$ și $m_{OC} = \frac{a}{3}$ , unde $a$ este număr real $OC \perp AB \Leftrightarrow m_{AB} \cdot m_{OC} = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = -1$ , de unde obținem $a = -3$	2p 3p
6.	$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} =$ $= 2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2} = \cos x$ , pentru orice număr real $x$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} =$ $= 6 \cdot (-3) - 10 \cdot (-2) = 2$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} (1+5x)(1+5y) - 20xy & -2y(1+5x) - 2x(1-4y) \\ 10x(1+5y) + 10y(1-4x) & -20xy + (1-4x)(1-4y) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+5x+5y+5xy & -2x-2y-2xy \\ 10x+10y+10xy & 1-4x-4y-4xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5(x+y+xy) & -2(x+y+xy) \\ 10(x+y+xy) & 1-4(x+y+xy) \end{pmatrix} = A(x+y+xy)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	3p 2p

c)	$(A(m))^{-1} = A(n) \Leftrightarrow A(m)A(n) = I_2 \Leftrightarrow A(m+n+mn) = A(0) \Leftrightarrow m+n+mn=0$ , unde $m$ și $n$ sunt numere întregi, $m \neq -1$ și $n \neq -1$	3p
	$mn+m+n+1=1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1)=1$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, obținem $m=n=-2$ sau $m=n=0$ , deci perechile sunt $(-2,-2)$ și $(0,0)$ , care convin	2p
2.a)	$1 \circ 0 = 1 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot a \cdot 0 = 0 + 1 + 0 = 1$ , pentru orice număr real $a$	3p 2p
b)	$x \circ 1 > 4 \Leftrightarrow x + x + 2a > 4 \Leftrightarrow 2x > 4 - 2a \Leftrightarrow x > 2 - a \Leftrightarrow x \in (2 - a, +\infty)$ $2 - a = 3$ , deci $a = -1$	3p 2p
c)	Legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă $\Leftrightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , pentru orice numere reale $x$ , $y$ și $z \Leftrightarrow (xy + x + 2ay)z + xy + x + 2ay + 2az = x(yz + y + 2az) + x + 2a(yz + y + 2az)$	2p
	Obținem $xz + 2az = 2axz + 4a^2z \Leftrightarrow z(x + 2a)(1 - 2a) = 0$ , pentru orice numere reale $x$ și $z$ , deci $a = \frac{1}{2}$	3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ , $x \in \mathbb{R}$	3p
	$e^x(f(x) + f'(x)) = e^x \left( \frac{x}{e^x} + \frac{1-x}{e^x} \right) = 1$ , pentru orice număr real $x$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	2p
c)	$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$	2p
	Cum $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$ , tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$ are ecuația $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , deci este dreapta de ecuație $y = x$	3p
2.a)	$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big _0^\pi =$	3p
	$= -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$	2p
b)	$\int_0^\pi xf(x) dx = \int_0^\pi x \sin x dx = -\int_0^\pi x(\cos x)' dx = -x \cos x \Big _0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx =$	3p
	$= -\pi \cos \pi + \sin x \Big _0^\pi = -\pi \cdot (-1) + 0 - 0 = \pi$	2p
c)	$\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (f(x) - f^2(x)) dx = \int_0^1 \sin x(1 - \sin x) dx$	2p
	Pentru orice $x \in [0,1]$ , $\sin x(1 - \sin x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \sin x(1 - \sin x) dx \geq 0$ , deci $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 f^2(x) dx$	3p

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***

Testul 10

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că, dacă  $z_1 = 1 - 2i$  și  $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$ , unde  $i^2 = -1$ , atunci  $z_1 + z_2 = z_1 z_2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , astfel încât  $(f \circ f)(x) = 2f(x - 1)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$ .
- 5p** 4. Determinați numărul funcțiilor  $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$  cu proprietatea  $f(2) \leq 8$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-2, 4)$ ,  $B(2, 0)$  și  $C$  astfel încât  $AC = BC$ . Determinați ecuația dreptei  $d$ , care trece prin punctul  $C$  și este perpendiculară pe dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  pentru care  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x + 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real și  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(x)) = 6^{2x}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$ .
- 5p** c) Demonstrați că orice matrice  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot X = A(1)$  are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 \circ 1 = 12$ .
- 5p** b) Se consideră numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $2a + 2b + c \neq 0$ . Știind că  $c \circ a = c \circ b$ , demonstrați că  $a = b$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (x + 1) = 5x^3 + 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x + a(x + 1)$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \ln x + 1 + a$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 1$ , determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , funcția  $f$  este convexă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + e^x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{1}{e}$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 x f(x^2) dx$ .
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^2 x^n (f(x) - 2x) dx$ . Demonstrați că  $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1} e^2$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 10

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$z_1 + z_2 = 1 - 2i + 1 + \frac{1}{2}i = 2 - \frac{3}{2}i$	2p
	$z_1 z_2 = (1 - 2i) \left( 1 + \frac{1}{2}i \right) = 1 + \frac{1}{2}i - 2i - i^2 = 2 - \frac{3}{2}i$ , deci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$	3p
2.	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x + m) + m = 4x + 3m$ , $2f(x - 1) = 2(2(x - 1) + m) = 4x - 4 + 2m$ ,	3p
	pentru orice număr real $x$ $4x + 3m = 4x - 4 + 2m \Leftrightarrow m = -4$	2p
3.	$5 \cdot 5^x \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^x = 10 \cdot 7^{x-1} \Leftrightarrow 10^{x-1} = 7^{x-1}$	3p
	$x - 1 = 0$ , deci $x = 1$	2p
4.	$f(2)$ poate fi aleasă în trei moduri și, pentru fiecare alegere a lui $f(2)$ , numerele $f(0)$ și $f(4)$ pot fi alese în câte patru moduri	3p
	Există $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ de funcții $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$ cu proprietatea $f(2) \leq 8$	2p
5.	$m_d \cdot m_{AB} = -1$ și, cum $m_{AB} = -1$ , obținem $m_d = 1$	2p
	$AC = BC \Rightarrow d$ este mediatoarea segmentului $AB$ și, cum $M(0, 2)$ este mijlocul segmentului $AB$ , obținem că ecuația dreptei $d$ este $y = x + 2$	3p
6.	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - x\right) = 1$	2p
	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , deci $x = \frac{\pi}{6}$	3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{vmatrix} = 4^x \cdot 9^x - 0 \cdot 0 =$	3p
	$= 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 6^{2x}$ , pentru orice număr real $x$	2p
b)	$A(x) \cdot B = \begin{pmatrix} -4^x & 4^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , $B \cdot A(x) = \begin{pmatrix} -4^x & 9^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$	3p
	$\begin{pmatrix} -4^x & 4^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4^x & 9^x \\ 0 & 9^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4^x = 9^x$ , de unde obținem $x = 0$	2p
c)	Cum $A(1) \cdot X = X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1)$ , pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 9c & 9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 9b \\ 4c & 9d \end{pmatrix}$ , deci $b = 0$ și $c = 0$	3p

	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-2, 2\} \text{ și } d \in \{-3, 3\}, \text{ deci orice matrice } X \text{ cu proprietatea că}$ $X \cdot X = A(1) \text{ are toate elementele numere întregi}$	2p
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 =$ $= 8 + 2 + 2 = 12$	3p 2p
b)	$2c^2 + ca + 2a^2 = 2c^2 + cb + 2b^2 \Leftrightarrow c(a-b) + 2(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c + 2a + 2b) = 0$ <p>Cum <math>2a + 2b + c \neq 0</math>, obținem <math>a - b = 0</math>, deci <math>a = b</math></p>	3p 2p
c)	$2x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 5x^3 + 2 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2 - x - 1) = 0$ $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = 0 \text{ sau } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	2p 3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + a(x+1)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a, x \in (0, +\infty), \text{ pentru orice număr real } a$	3p 2p
b)	$f'(x) = \ln x + 2, \text{ deci } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$ $f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \text{ și } f'(x) \geq 0, \text{ pentru}$ $\text{orice } x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right) \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty), \text{ pentru orice număr real } a$ $f''(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty), \text{ deci, pentru orice număr real } a, \text{ funcția } f \text{ este convexă}$	2p 3p
2.a)	$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x + e^x) dx = (x^2 + e^x) \Big _{-1}^0 =$ $= 0 + e^0 - 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x f(x^2) dx = \int_0^1 (2x^3 + xe^{x^2}) dx = \int_0^1 2x^3 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{x^4}{2} \Big _0^1 + \frac{e^{x^2}}{2} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} + \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e}{2}$	3p 2p
c)	$I_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1} (f(x) - 2x) dx = \int_0^2 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big _0^2 - (n+1) \int_0^2 x^n e^x dx =$ $= 2^{n+1} e^2 - (n+1) I_n, \text{ deci } I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	3p 2p

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 11**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_2 = 6$  și  $b_3 = 3$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3x - 4$ . Determinați numerele reale  $a$ , pentru care  $f(-a) + f(a) = 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+1} = 16 \cdot 4^{-x}$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,5)$ ,  $B(4,-3)$  și  $C(a,a+3)$ , unde  $a$  este un număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care dreapta  $OC$  trece prin mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p** 6. Arătați că  $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  și  $B(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det(B(1,2)) = -1$ .
- 5p** b) Arătați că  $\det(A \cdot B(a,b)) = 0$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $A \cdot B(a,b) = B(a,b) \cdot A$ .
2. Pe mulțimea  $M = [1, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = |x - y| + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $3 \circ 5 = 3$ .
- 5p** b) Calculați  $a - b$ , știind că  $a = (2 \circ 3) \circ 4$  și  $b = 2 \circ (3 \circ 4)$ .
- 5p** c) Arătați că există o infinitate de perechi  $(m,n)$  de numere naturale nenule pentru care  $m \circ n = m$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 5p** c) Demonstrați că funcția  $f$  **nu** este surjectivă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 2f(x) dx = 3$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 11**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$ $b_4 = \frac{3}{2}$	3p 2p
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$ $a = -2$ sau $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x+1 = 4-2x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	2p 2p 1p
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului $AB$ $M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta $OM$ are ecuația $x-3y=0$ , obținem $a-3(a+3)=0$ , deci $a = -\frac{9}{2}$	2p 3p
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ , $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ , pentru orice număr real $x$ $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ , pentru orice număr real $x$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	2p 3p
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ $\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$ și $b=0$	2p 3p



<b>2.a)</b>	$3 \circ 5 =  3 - 5  + 1 =  -2  + 1 =$ $= 2 + 1 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$a = (2 \circ 3) \circ 4 = 2 \circ 4 = 3$ $b = 2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 2 = 1$ , deci $a - b = 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Pentru $n = 1$ și $m$ număr natural nenul, $m \circ n = m \circ 1 =  m - 1  + 1 = m - 1 + 1 =$ $= m$ , deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule $(m, n)$ pentru care $m \circ n = m$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (\ln(x-1) - \ln(x+1))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} =$ $= \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$ , $x \in (1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} =$ $= \ln \frac{1-0}{1+0} = \ln 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x \in (1, +\infty) \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , deci funcția $f$ este crescătoare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , deci funcția $f$ nu este surjectivă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 2f(x) dx = \int_0^1 (2x+2) dx = (x^2 + 2x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 2 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (x+1) dx = \int_0^1 (e^x)' (x+1) dx = (x+1)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx =$ $= 2e - 1 - e^x \Big _0^1 = 2e - 1 - (e - 1) = e$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(e^x) - e^{f(x)} = e^x + 1 - e^{x+1} = 1 - e^x(e-1)$ , pentru orice $x \in [0, e]$ $e - 1 > 1$ și $e^x \geq 1$ , pentru orice $x \in [0, e] \Rightarrow 1 - e^x(e-1) \leq 0$ , pentru orice $x \in [0, e]$ , de unde obținem că $\int_0^e f(e^x) dx \leq \int_0^e e^{f(x)} dx$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 12**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $b_8$  al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_5 = 3$  și  $b_6 = 6$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x - 3$ . Arătați că  $(f \circ f)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2 \lg x = \lg(5x + 6)$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,3)$ ,  $B(-1,-2)$  și  $C(a,-2)$ , unde  $a$  este număr real nenul,  $a \neq -1$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care ortocentrul triunghiului  $ABC$  este  $O$ .
- 5p** 6. În triunghiul  $ABC$ ,  $AB = 6$ ,  $AC = 3\sqrt{6}$  și  $B = \frac{\pi}{3}$ . Determinați măsura unghiului  $C$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(\sqrt{2})) = 3$ .
- 5p** b) Arătați că matricea  $A(a)$  este inversabilă, pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Determinați numărul întreg  $k$  pentru care  $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = kA(1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$ .
- 5p** a) Arătați că numărul  $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3}$  este întreg.
- 5p** b) Arătați că  $x \circ x \geq \frac{2}{3}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x \circ x \circ x = e$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Arătați că graficul funcției  $f$  nu admite asimptotă spre  $+\infty$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) < f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .
2. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^4 f^4(x) dx = 21$ .

**5p** | **b)** Calculați  $\int_0^1 f(e^x) dx$ .

**5p** | **c)** Arătați că  $\int_1^4 e^{f(x)} dx = 2e^2$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 12

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q = \frac{b_6}{b_5} = 2$	2p
	$b_8 = b_6 q^2 = 6 \cdot 4 = 24$	3p
2.	$f(\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3} - 3 = -\sqrt{3}$	2p
	$f(f(\sqrt{3})) = f(-\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} - 3 = \sqrt{3}$	3p
3.	$\lg x^2 = \lg(5x+6) \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$	3p
	$x = -1$ , care nu convine; $x = 6$ , care convine	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	2p
	Cifra sutelor, egală cu cifra unităților, poate fi aleasă în 9 moduri, iar, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 10 moduri, deci sunt 90 de cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$	1p
5.	$BC \parallel Ox$ și $A \in Oy \Rightarrow AO \perp BC$ , deci $O$ este ortocentrul triunghiului $ABC \Leftrightarrow OC \perp AB$	2p
	Cum $m_{OC} = -\frac{2}{a}$ și $m_{AB} = 5$ , obținem că $-\frac{2}{a} \cdot 5 = -1$ , deci $a = 10$	3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin C = \frac{6 \sin B}{3\sqrt{6}}$ și, cum $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , obținem $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$	3p
	Cum $C < \pi - \frac{\pi}{3}$ , obținem $C = \frac{\pi}{4}$	2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(\sqrt{2})) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 1 + 2 = 3$	3p
b)	$\det A(a) = 1 + a^2$ , pentru orice număr real $a$	2p
	$1 + a^2 > 0$ , pentru orice număr real $a \Rightarrow \det A(a) \neq 0$ , deci $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr real $a$	3p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ , $A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$	3p
	$A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) \cdot A(1) = -4I_2 \cdot A(1) = -4A(1)$ , deci $k = -4$	2p

<b>2.a)</b>	$\frac{1}{3} \circ \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 2 = 1$ , care este număr întreg	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$x \circ x = 3x^2 - 4x + 2$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$x \circ x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \geq 0$ și, cum $\Delta = 0$ , obținem că $x \circ x \geq \frac{2}{3}$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \circ 1 = 1 \circ x = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 1$	<b>2p</b>
	$x \circ x \circ x = 1 \Leftrightarrow 3^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ , de unde obținem $x = 1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} =$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$ , deci graficul lui $f$ nu admite asimptotă spre $+\infty$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ ,	<b>3p</b>
	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum $f$ este continuă în $x = 1$ , obținem că $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^4 f^4(x) dx = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^4 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{4^3 - 1^3}{3} = 21$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(e^x) dx = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx = \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2\sqrt{e} - 2$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^4 e^{f(x)} dx = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 (\sqrt{x})' \cdot \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 t e^t dt =$	<b>3p</b>
	$= 2(t-1)e^t \Big _1^2 = 2e^2$	<b>2p</b>